固有値問題への因数分解法の適用

AUTHOR(S):
中島, 紀美枝; 竹山, 尚賢

固有値問題への因数分解法の適用

佐賀大・理工・工化　　中 島　紀美枝
竹 山　尚 賢

（ 9月 1日受理 ）

§ 1. はじめに

いま対象とする体系（ 質量m， 運動量 $\hat{p}$ ）の量子力学的ハミルトニアン $\hat{H}$ が

$$\mathscr{H} \equiv 2m\hat{H} = \hat{p}^2 + 2mU(\hat{q}) \tag{1}$$

により与えられ，ポテンシャルエネルギー $U(\hat{q})$ が位置座標 $\hat{q}$ の解析関数で示される場合の固有値問題を因数分解法で解くことを考える。処方は次の通りである。

定常状態 j，そのエネルギー準位を $E_j \equiv 2m\varepsilon_j$ として，j に対するハミルトニアン

$$\mathscr{H}_j = (\mathscr{H} - \varepsilon_j) + \varepsilon_j \tag{2}$$

に対して

$$\vec{\mathscr{P}}_j = (\hbar/2)\,\mathrm{grad}\ \ell n\ \rho_j\ , \tag{2・1}$$

$$\rho_j = |\psi_j|^2 = \text{状態 j に対する確率密度}$$

をとり，j に対する波動方程式が

$$\varepsilon_j = 2mU - \mathscr{P}_j^2 - \hbar\ \mathrm{div}\,\vec{\mathscr{P}}_j \tag{2・2}$$

となることに留意し，(1)，(2) から

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_j &= \hat{p}^2 + \hbar\ \mathrm{div}\,\vec{\mathscr{P}}_j + \mathscr{P}_j^2 + \varepsilon_j \\ &= (\hat{p} - i\vec{\mathscr{P}}_j)(\hat{p} + i\vec{\mathscr{P}}_j) + \varepsilon_j \\ &= \mathbf{P}_j^{*}\mathbf{P}_j + \varepsilon_j \end{aligned} \tag{2・3}$$

と表わせることがわかる。ここに

$$\mathbf{P}_j = \hat{p} + i\vec{\mathcal{P}}_j \ ; \quad \mathbf{P}_j^{*} = \hat{p} - i\vec{\mathcal{P}}_j \tag{2・4}$$

を導入した。

これらにより単なる書きかえのレベルをこえて，固有値問題における因数分解法につながり，そこにおける必要十分条件が漸化式

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{j+1} &= \mathbf{P}_{j+1}^{*}\ \mathbf{P}_{j+1} + \varepsilon_{j+1} \\ &= \mathbf{P}_j\ \mathbf{P}_j^{*} + \varepsilon_j \end{aligned} \tag{2・5}$$

の組であることを知った。(2・5) は (2・3) により

$$\mathscr{H}_{j+1} = \mathscr{H}_j + [\mathbf{P}_j,\ \mathbf{P}_j^{*}] \tag{2・6}$$

となるから，交換関係 $[\mathbf{P}_j,\ \mathbf{P}_j^{*}] = \mathbf{P}_j\mathbf{P}_j^{*} - \mathbf{P}_j^{*}\mathbf{P}_j$ が正にハミルトニアンを昇位させていく項で，(2・1 & 4) により

$$[\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_j^{*}] = -\hbar^2 \triangle\ \ell n\ \rho_j \tag{2・7}$$

であるから，かって量子ポテンシャル (Bohm) としてさわがれた項と直接関連することがわかる。この報告の目的は，因数分解法を 2，3 の具体例に適用し，枚挙の精神に基いて足場がためを行なうことである。

ところで上述のように書いたのでは方法として活用できる余地は全くないではないかと苦情がでるであろう。それで具体的手続きを記しておくことにする。

まず基底状態 j＝1 に対して (2) の $\mathscr{H}_1$ は

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H} = \hat{p}^2 + 2\,mU \tag{3}$$

であり，未定の関数 $f_1(\hat{q})$ により

$$\vec{\mathcal{P}}_1 = f_1(\hat{q}) \tag{3・1}$$

ととると，(2・3) と (3) により

$$\mathscr{H}_1 = \hat{p}^2 + \hbar\nabla f_1 + f_1^2 + \varepsilon_1$$

$$= \hat{p}^2 + 2mU$$

が成立しなければならない。こうなるように，即ち

$$2mU = \hbar \nabla f_1 + f_1^2 + \varepsilon_1 \tag{3・2}$$

となるように，$f_1(\hat{q})$ を決定することが最初の課題となる。これが定まると後は (2・4) を $j=1$ に対して作り，(2・5) によって $j=2, 3, \cdots, n$ といもづる的にハミルトニアンが昇位しつつ，固有値が求まる。この方式は (3・2) による $f_1(\hat{q})$ の決定が代数的に行なえる点にすべての利点がある。

§ 2. 例題 (1) Morse oscillator

$$2mU(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) \tag{4}$$

の場合である。

未定関数 $f_1(x)$ として

$$f_1(x) = a_1(e^{-\alpha x} - b_1) \tag{4・1}$$

をとり，(3・2) が成立するように未定係数 a_1, b_1 を定める。

$j=1$ に対する (2・3) は

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \hat{p} + i\, a_1(e^{-\alpha x} - b_1) \\ \mathbf{P}_1^* &= \hat{p} - i\, a_1(e^{-\alpha x} - b_1) \end{aligned}\right\} \tag{4・2}$$

により，次式となる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \hat{p}^2 + a_1^2 e^{-2\alpha x} - a_1(2a_1b_1 + \hbar\alpha)e^{-\alpha x} + a_1^2 b_1^2 + \varepsilon_1 \\ &= \mathcal{H} = \hat{p}^2 + Ae^{-2\alpha x} - 2Ae^{-\alpha x} \end{aligned} \tag{4・3}$$

これが成立するためには，次の関係が成立しなければならない。

$$a_1^2 = A; \quad a_1(2a_1b_1 + \hbar\alpha) = 2A; \quad a_1^2 b_1^2 + \varepsilon_1 = 0 \tag{4・4}$$

最初の等式から $a_1 = \pm\sqrt{A}$ となるが，(4・2) による

$$[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_1^*] = 2\hbar\alpha a_1 e^{-\alpha x} > 0 \qquad (4\cdot 5)$$

($\alpha > 0$) から $a_1 > 0$ でなければならず

$$a_1 = \sqrt{A} \qquad (4\cdot 6\cdot a)$$

が定まる。(4・4) の2番目の式から，

$$b_1 = (2A - \hbar\alpha a_1) / 2a_1^2$$

$$= 1 - (\hbar\alpha / 2\sqrt{A}) \qquad (4\cdot 6\cdot b)$$

3番目の式から

$$\varepsilon_1 = -a_1^2 b_1^2 = -A\{1 - (\hbar\alpha / 2\sqrt{A})\}^2 \qquad (4\cdot 6\cdot c)$$

と固有値が求まる。

(2・6) により，(4・6・a)，(4・5) を使って

$$\mathscr{H}_2 = \hat{p}^2 + A e^{-2\alpha x} - 2(A - \hbar\alpha\sqrt{A}) e^{-\alpha x} \qquad (4\cdot 7)$$

と求まるが，(2・5) により

$$\mathscr{H}_2 = \mathbf{P}_2^* \mathbf{P}_2 + \varepsilon_2 \qquad (4\cdot 8)$$

を成立させる $\mathbf{P}_2 = \hat{p} + i a_2 (e^{-\alpha x} - b_2)$ を $j = 1$ の場合と同様に (4・7) に対して未定係数 a_2, b_2 を定めることにより求める。

$$\mathscr{H}_2 = \hat{p}^2 + a_2^2 e^{-\alpha x} - a_2(2a_2b_2 + \hbar\alpha) e^{-\alpha x} + a_2^2 b_2^2 + \varepsilon_2 \qquad (4\cdot 8')$$

を (4・7) と比較して

$$a_2 = \sqrt{A} \qquad (4\cdot 8'\cdot a)$$

が定まり，b_2 は

$$2A b_2 + \hbar\alpha\sqrt{A} = 2(A - \hbar\alpha\sqrt{A})$$

から,

$$b_2 = 1 - (3\hbar\alpha / 2\sqrt{A}) \tag{4・8′・b}$$

と定まる。これらにより固有値は

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= -a_2^2 b_2^2 \quad , \\ &= -A\{1-(3\hbar\alpha/2\sqrt{A})\}^2\end{aligned} \tag{4・8′・c}$$

と求まる，また

$$[P_1, P_1^*] = [P_2, P_2^*] = 2\hbar\alpha\sqrt{A}\,e^{-\alpha x} \tag{4・9}$$

が成立する。

一般に

$$\mathbf{P}_j = \hat{p} + i\,a_j(e^{-\alpha x} - b_j) \tag{4・10}$$

とおいて

$$[\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_j^*] = 2\hbar\alpha\,a_j\,e^{-\alpha x} \tag{4・10・a}$$

を求めておいて，(2・5) により，j と j + 1 との間の準位差を出すと

$$\begin{aligned}\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j &= a_j^2 b_j^2 - a_{j+1}^2 b_{j+1}^2 + (a_j^2 - a_{j+1}^2)\,e^{-2\alpha x} \\ &\quad - \{a_j(2a_j b_j - \hbar\alpha) - a_{j+1}(2a_{j+1}b_{j+1} + \hbar\alpha)\}\,e^{-\alpha x}\end{aligned} \tag{4・10・b}$$

となるが，帰納法的に $e^{-2\alpha x}$, $e^{-\alpha x}$ の前にかかる係数は消えなければならないことが明らかであり，(4・6・a)，(4・8′・a) とともに，まず

$$a_{j+1}^2 = a_j^2 = \cdots = a_2^2 = a_1^2 = A$$

あるいは,

$$a_{j+1} = a_j = \cdots = a_2 = a_1 = \sqrt{A} \tag{4・10・c}$$

がいえて，（4・10・a）に対し（4・9）とともに

$$[P_1, P_1^*] = [P_2, P_2^*] = \cdots = [P_j, P_j^*] = 2\hbar\alpha\sqrt{A}\, e^{-\alpha x} \tag{4・10・d}$$

が成立することとなる。これによって，（4・3），（4・7）の系として，一般形

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j &= \mathcal{H}_1 + 2\hbar\alpha\sqrt{A}(j-1)e^{-\alpha x}, \\ \mathcal{H}_1 &= \mathcal{H} = \hat{p}^2 + A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) \end{aligned} \tag{4・11}$$

がえられる。

（4・10）を用い，$a_j = \sqrt{A}$ としてえられる

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j &= P_j^* P_j + \varepsilon_j \\ &= \hat{p}^2 + A e^{-2\alpha} - (2Ab_j + \hbar\alpha\sqrt{A})\ e^{-\alpha x} + Ab_j^2 + \varepsilon_j \end{aligned} \tag{4・11′}$$

を（4・11）と比較して未定の b_j を

$$2Ab_j + \hbar\alpha\sqrt{A} = 2\{A - \hbar\alpha(j-1)\sqrt{A}\}$$

から

$$b_j = 1 - \{\hbar\alpha(2j-1)/2\sqrt{A}\} \tag{4・12}$$

と定め，同時に（4・11′）から固有値

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= -Ab_j^2 \\ &= -A\left\{1 - \frac{\hbar\alpha}{\sqrt{A}}\left(j - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 \end{aligned} \tag{4・13}$$

が求まる。

あるいは（4・10・b）から，（4・10・c）とともに

$$a_j(2a_jb_j - \hbar\alpha) = a_{j+1}(2a_{j+1}b_{j+1} + \hbar\alpha)$$

により，

$$b_{j+1}=b_j-(\hbar\alpha/\sqrt{A})$$

これを j＝1，2，…，（j－1）に対して使って

$$b_j=b_1-(\hbar\alpha/\sqrt{A})(j-1)$$

$$=1-(\hbar\alpha/\sqrt{A})(j-½) \tag{4·12′}$$

が求まる。ただし，b_1 は（4·6·b）である。また

$$\varepsilon_{j+1}+a_{j+1}^2b_{j+1}^2=\varepsilon_j+a_j^2b_j^2$$

の関係を漸化式として用い，最後に（4·4）によって

$$\varepsilon_j+a_j^2b_j^2=\cdots=\varepsilon_2+a_2^2b_2^2=\varepsilon_1+a_1^2b_1^2=0$$

が成立するが，これから固有値が（4·12′）を用いて（4·13）の形に求まる。

定常状態を区別する量子数を j＝1，2，3，… から，n＝0，1，2，… にとりかえると通常の形

$$E_n=\varepsilon_{j+1}/2m$$

$$=-(A/2m)\{1-(\hbar\alpha/\sqrt{A})(n+½)\}^2$$

$$=-(A/2m)+(\hbar\alpha\sqrt{A}/m)(n+½)$$

$$-(\hbar^2\alpha^2/2m)(n+½)^2 \tag{4·14}$$

となり，

$A/2m\equiv D$ ＝解離エネルギー，

$\hbar\alpha\sqrt{A}/m=\hbar\alpha(2D/m)^{½}\equiv\hbar\omega$，

$\hbar\omega/4D\equiv x$

のおきかえにより，よく知られた式

$$E_n=-D+\hbar\omega(n+½)-x\hbar\omega(n+½)^2 \tag{4·15}$$

となる。

相隣る定常状態のハミルトニアンの差は（4・10・d）により一定であり，これにより順次昇位していくが，エネルギー準位は非調和項の存在により，決して等間隔とはならないのである。

例題（2） $x=0$ の両側で対称的であり， $x=\pm\infty$ からの深さが $-U_0$ であるポテンシャル

$$U(x) = -U_0 \ \mathrm{sech}^2 \alpha x \tag{5}$$

（$\alpha>0$）の上での振動子の場合である。

$$\mathscr{H} = \hat{p}^2 - V_0 + V_0 \ \tanh^2 \alpha x, \tag{5・1}$$

$$V_0 \equiv 2mU_0$$

に対し， a_j を未定係数として

$$\vec{\mathscr{P}}_j = -a_j \ \tanh \alpha x \tag{5・2}$$

を導入し， $P_j = \hat{p} + i\vec{\mathscr{P}}_j$， $P_j^* = \hat{p} - i\vec{\mathscr{P}}_j$ により次式を準備しておく。

$$P_j^* P_j = \hat{p}^2 + a_j(a_j + \hbar\alpha)\tanh^2 \alpha x - \hbar\alpha a_j \tag{5・3・a}$$

$$P_j P_j^* = \hat{p}^2 + a_j(a_j - \hbar\alpha)\tanh^2 \alpha x + \hbar\alpha a_j \tag{5・3・b}$$

$$[P_j, P_j^*] = 2\hbar\alpha a_j \ \mathrm{sech}^2 \alpha x > 0 \tag{5・3・c}$$

量子数のとりかえをさけるために基底状態を $j=0$ で区別することとし，

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_0 &= P_0^* P_0 + \varepsilon_0 \\ &= \hat{p}^2 + a_0(a_0 + \hbar\alpha)\tanh^2 \alpha x - \hbar\alpha a_0 + \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{5・4}$$

を（5・1）と比較して

$$\varepsilon_0 = -V_0 + \hbar\alpha a_0, \tag{5・4・a}$$

$$V_0 = a_0(a_0 + \hbar\alpha) \tag{5・4・b}$$

の関係から a_0 を定め，ε_0 を求める。

(5・4・b) から

$$a_0 = -\hbar\alpha/2 \pm (1/2)\{(\hbar\alpha)^2 + 4V_0\}^{1/2}$$

の2根が求まるが，$a_0 > 0$ (∵(5・3・c)) を満すのは

$$a_0 = (\hbar\alpha/2)[\{1+(4V_0/\hbar^2\alpha^2)\}^{1/2} - 1] \tag{5・5}$$

である。これと (5・4・a) から固有値が次のように求まる。

$$\varepsilon_0 = -V_0 + (\hbar^2\alpha^2/2)[\{1+(4V_0/\hbar^2\alpha^2)\}^{1/2} - 1] \tag{5・6}$$

$j = 0$ に対する (5・3・b) を用いて，(2・5) から

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_1 &= \mathbf{P}_0\mathbf{P}_0^{*} + \varepsilon_0 \\ &= \hat{p}^2 + a_0(a_0 - \hbar\alpha)\tanh^2\alpha x + \hbar\alpha a_0 + \varepsilon_0 && (5・7・a) \\ &= \mathbf{P}_1^{*}\mathbf{P}_1 + \varepsilon_1 \\ &= \hat{p}^2 + a_1(a_1 + \hbar\alpha)\tanh^2\alpha x - \hbar\alpha a_1 + \varepsilon_1 && (5・7・b)\end{aligned}$$

(5・7・a) と (5・7・b) の係数を比較して，未定の a_1 が

$$a_1 = -a_0,\quad a_0 - \hbar\alpha$$

と求まるが，(5・3・c) を満すものは，

$$\begin{aligned}a_1 &= a_0 - \hbar\alpha \\ &= (\hbar\alpha/2)[\{1+(4V_0/\hbar^2\alpha^2)\}^{1/2} - 3] && (5・8)\end{aligned}$$

である。また，定数項の比較から

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \hbar\alpha(a_0 + a_1) \tag{5・9}$$

がえられる。これは (5・5，6，8) により具体化できるが，ここで (2・5) により一般形を求めよう。

$j = n$ に対し（2・5）から

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = P_n P_n^* - P_{n+1}^* P_{n+1}$$
$$= \hbar\alpha(a_n + a_{n+1}) + \{a_n(a_n - \hbar\alpha) - a_{n+1}(a_{n+1} + \hbar\alpha)\}$$
$$\times \tanh^2 \alpha x$$

これと $n=0$ のすでに求めた関係とから帰納できることは

$$a_n(a_n - \hbar\alpha) - a_{n+1}(a_{n+1} + \hbar\alpha)$$
$$= (a_n + a_{n+1})(a_n - a_{n+1} - \hbar\alpha)$$
$$= 0$$

からの

$$a_{n+1} = a_n - \hbar\alpha$$

あるいは

$$a_n = a_0 - n\hbar\alpha \tag{5・10}$$

及び

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \hbar\alpha(a_n + a_{n+1})$$

あるいは（5・9）に留意してえられる。

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 + \hbar\alpha(a_0 + a_n) + 2\hbar\alpha(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1})$$
$$= \varepsilon_0 + 2n\hbar\alpha\, a_0 - n^2\hbar^2\alpha^2 \tag{5・11}$$

の二式である。（5・11）は（5・5），（5・6）を用い整理すれば次式となる。

$$\varepsilon_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{4}\left\{\left(1 + \frac{4V_0}{\hbar^2\alpha^2}\right)^{1/2} - (2n+1)\right\}^2 \tag{5・12}$$

あるいは

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{8m}\{(1+\frac{8m\,U_0}{\hbar^2\alpha^2})^{1/2} - (2n+1)\}^2 \qquad (5\cdot12')$$

相隣る定常状態 j から（ j＋1）へハミルトニアンを昇位させる演算子，

$$\mathscr{H}_{j+1} = \mathscr{H}_j + [\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_j^*]$$

における右辺の交換子は（5・3・c），（5・10）及び（5・5）により次のように具体化される。

$$\begin{aligned}[\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_j^*] &= 2\hbar\alpha(a_0 - j\hbar\alpha)\,\mathrm{sech}^2\alpha x \\ &= \hbar^2\alpha^2[(1+\frac{4V_0}{\hbar^2\alpha^2})^{1/2} - (2j+1)]\,\mathrm{sech}^2\alpha x \qquad (5\cdot13)\end{aligned}$$

これが正にとどまるための条件として

$$2j < (1+\frac{4V_0}{\hbar^2\alpha^2})^{1/2} - 1 \qquad (5\cdot14)$$

が必要であるが，これは（5・12）で有限数の準位が存在するために量子数に課される条件でもある。従って（5・3・c）が正であることを要求してハミルトニアンを昇位させていくことは，正しくとびとびのエネルギー準位を有する定常状態を昇っていくことに対応し，これが量子ポテンシャル，あるいは量子雲の拡散ポテンシャルの定常現象における実体論的役割といっても過言ではない。

例題（3）上述の二つの場合を包括する例として Teller—Pöschel の第２ポテンシャル

$$2mU(x) = \hbar^2\alpha^2\{\nu(\nu-1)\,\mathrm{cosech}^2\,\alpha x - \mu(\mu+1)\,\mathrm{sech}^2\,\alpha x\} \quad (6)$$

（$\nu > 1$，$\mu > 0$，$\alpha > 0$）を考え，ポテンシャル修飾の技巧が問題を非常に簡単化することがあることに注意したい。

未定係数 a_j，b_j を用いて

$$\vec{\mathscr{P}}_j = a_j\,\coth\alpha x - b_j\,\tanh\alpha x \qquad (6\cdot1)$$

ととり次式を準備する。

$$\mathbf{P}_j^*\mathbf{P}_j = (\hat{p} - i\vec{\mathscr{P}}_j)(\hat{p} + i\vec{\mathscr{P}}_j)$$

$$= \hat{p}^2 + a_j(a_j - h\alpha)\ \mathrm{cosech}^2\alpha x$$

$$- b_j(b_j + \hbar\alpha)\,\mathrm{sech}^2\alpha x + (a_j - b_j)^2 \qquad (6\cdot1\cdot a)$$

$$[\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_j^*] = 2\hbar\alpha(a_j\ \mathrm{cosech}^2\alpha x + b_j\ \mathrm{sech}^2\alpha x) > 0 \qquad (6\cdot1\cdot b)$$

基底状態 $j=0$ に対して

$$\mathscr{H}_0 = \mathbf{P}_0^*\mathbf{P}_0 + \varepsilon_0 = \mathscr{H}$$

の比較から

$$a_0(a_0 - \hbar\alpha) = \hbar^2\alpha^2\nu(\nu - 1)$$

$$b_0(b_0 + \hbar\alpha) = \hbar^2\alpha^2\mu(\mu + 1)$$

がえられ，

$$a_0 = \hbar\alpha\nu \quad \text{及び} \quad b_0 = \hbar\alpha\mu \qquad (6\cdot2)$$

と定まる。一方

$$\varepsilon_0 = -(a_0 - b_0)^2$$

から，(6・2) を用いて

$$\varepsilon_0 = -\hbar^2\alpha^2(\nu - \mu)^2 \qquad (6\cdot3)$$

と求まる。次に $\mathscr{H}_0$ から $\mathscr{H}_1$ への昇位は

$$[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0^*] = 2\hbar^2\alpha^2(\nu\ \mathrm{cosech}^2\alpha x + \mu\ \mathrm{sech}^2\alpha x)$$

であるから (6) に加え，(6・1・a) で $j=1$ としてえられる式を用いて作られる。

$$\mathscr{H}_1 = \mathbf{P}_1^*\mathbf{P}_1 + \varepsilon_1$$

と比較して，

$$a_1(a_1-\hbar\alpha) = \nu(\nu+1)\hbar^2\alpha^2$$

$$b_1(b_1+\hbar\alpha) = \mu(\mu-1)\hbar^2\alpha^2$$

の関係がえられ

$$a_1=\hbar\alpha(\nu+1),\quad b_1=\hbar\alpha(\mu-1) \tag{6・4}$$

と定まる。一方，固有値は

$$\varepsilon_1=-(a_1-b_1)^2 = -\hbar^2\alpha^2(\nu-\mu+2)^2 \tag{6・5}$$

となる。相隣る定常状態間の準位差は

$$\begin{aligned}\varepsilon_{j+1}-\varepsilon_j &= \mathbf{P}_j\mathbf{P}_j^{*}-\mathbf{P}_{j+1}^{*}\mathbf{P}_{j+1}\\ &=(a_j-b_j)^2-(a_{j+1}-b_{j+1})^2\\ &\quad+\{a_j(a_j+\hbar\alpha)-a_{j+1}(a_{j+1}-\hbar\alpha)\}\operatorname{cosech}^2\alpha x\\ &\quad-\{b_j(b_j-\hbar\alpha)-b_{j+1}(b_{j+1}+\hbar\alpha)\}\operatorname{sech}^2\alpha x\end{aligned}$$

であるが，二つの｛　｝内を零とおいて，次の一般的関係が帰納される。

$$a_{j+1}=a_j+\hbar\alpha$$

からの

$$a_j=a_0+j\hbar\alpha=\hbar\alpha(\nu+j), \tag{6・6・a}$$

及び

$$b_{j+1}=b_j-\hbar\alpha$$

からの

$$b_j = b_0 - j\hbar\alpha = \hbar\alpha(\mu - j), \tag{6・6・b}$$

である。

これらにより，固有値は

$$\varepsilon_j = -(a_j - b_j)^2$$
$$= -\hbar^2\alpha^2(\nu - \mu + 2j)^2 \tag{6・7}$$

と求まる。

$$E_n = -(\hbar^2\alpha^2/2m)(\nu - \mu + 2n)^2,$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

がよく知られた固有値である。

ところで（6・1・b）からの

$$[\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_n^*] = 2\hbar^2\alpha^2\{(\nu+n)\ \mathrm{cosech}^2\alpha x + (\mu - n)\ \mathrm{sech}^2\alpha x\} \tag{6・8}$$

により定常状態 n に対するハミルトニアンは次のように求まる。

$$\mathscr{H}_n = \mathscr{H}_0 + \sum_{j=0}^{(n-1)}[\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_j^*]$$
$$= \hat{p}^2 + \hbar^2\alpha^2[\{\nu(\nu+1) + (n-1)(n+2\nu)\}\ \mathrm{cosech}^2\alpha x$$
$$- \{\mu(\mu-1) + (n-1)(n-2\mu)\}\ \mathrm{sech}^2\alpha x] \tag{6・9・a}$$

これが

$$\mathscr{H}_n = \mathbf{P}_n^*\mathbf{P}_n + \varepsilon_n$$
$$= \hat{p}^2 + a_n(a_n - \hbar\alpha)\ \mathrm{cosech}^2\alpha x$$
$$- b_n(b_n + \hbar\alpha)\ \mathrm{sech}^2\alpha x + (a_n - b_n)^2 + \varepsilon_n \tag{6・9・b}$$

となることは（6・9・a，b）間に

$$a_n(a_n-\hbar\alpha)=\hbar^2\alpha^2\{\nu(\nu+1)+(n-1)(n+2\nu)\}$$
$$=\hbar^2\alpha^2(\nu+n)(\nu+n-1)$$

及び

$$b_n(b_n+\hbar\alpha)=\hbar^2\alpha^2\{\mu(\mu-1)+(n-1)(n-2\mu)\}$$
$$=\hbar^2\alpha^2(\mu-n)(\mu-n+1)$$

が成立するとともに，同時に固有値

$$\varepsilon_n=-(a_n-b_n)^2$$

がえられることを意味する。

§3．む す び

この報告は演習問題（実際，前二つの例題は Landau，Lifschitz のテキストから，最後の例題は戸田氏の“振動論”からとった）の域を出ないことは十分承知している積りである。伝統的処方に比して，どのような特徴があるかをみる為に，一度はくぐらざるをえない関門であると考えてとり上げた次第である。それだけに初歩＝基礎的に因数分解法の代数的特徴をえがきだせたのではなかろうか？　本法の代数学的構造には注目すべき様相がみられ，三題はそれぞれユニークな姿をみせながらも全体としては最後のポテンシャルが前二題の場合を包括していることは良く知られている。ランダムに並べたのではないことをくみとって頂きたい。

終りに，前報（竹山；物性研究，16－5）の Teller－Pöschel の例題の不注意な誤りを今回の例題（3）で正させて頂く。なお例題（2）では $\vec{\mathcal{P}}$ として，tanh を採用することの必然性をみる為に回りくどい道をえらんだ。この場合でも，例えば（5・4・a＆b）から，$\varepsilon_0=-a_0^2$，同様に $\varepsilon_1=-a_1^2$，等，一般には $\varepsilon_{n+1}+a_{n+1}^2=\varepsilon_n+a_n^2=\cdots\cdots=\varepsilon_1+a_1^2=\varepsilon_0+a_0^2=0$ が成立し，より容易に（5・12）に達しうる。

注目すべき唯一の本質的なことは，

$$\left[\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_j^{*} \right] = - \hbar^2 \Delta \ell n \rho_j$$

により，右辺の量子雲のひろがりを左辺による代数により追随しながら，基底状態の上に各定常状態をとらえていく「いもづる方式」の論理である。